MT-04

December - Examination 2016

B.A. / B.Sc. Pt. II Examination

Real Analysis & Matric Space

Paper - MT-04

Time : 3 Hours] **[Max. Marks :- 67**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answer as per the given instructions.

निर्देश : यह प्रश्न पत्र 'अ' 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Section - A $7 \times 1 = 7$

Very Short Answer Questions

Note: Section 'A' contain seven (07) Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit may be thirty words.

खण्ड – 'अ'

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

निर्देश : खण्ड 'ए' में सात (07) लघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न को 01 अंक है और अधिकतम शब्द तीस शब्द हैं।

1) (i) Define a complete metric space.
पूर्ण दूरीक समष्टि को परिभाषित कीजिए।

(ii) Explain uniform convergence of sequences of functions.
फलनों के अनुक्रम के एक समान अभिसरण को समझाइए।

(iii) Define a supremum of an ordered field.
क्रमित क्षेत्र में उच्चक को परिभाषित कीजिए।

(iv) Define limit point of a set.
समुच्चय का सीमा बिन्दु परिभाषित कीजिए।

(v) Define a Cauchy's sequence.
कोशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define removable discontinuity.
अवनेय असातंत्यताको परिभाषित कीजिए।

(vii) Define Darboux sum.
डार्बू योगफल को परिभाषित कीजिए।

Section - B $4 \times 8 = 32$

Short Answer Questions

Note: Section 'B' contain Eight Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any four (04) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

(खण्ड – ब)

लघुत्तरात्मक प्रश्न

निर्देश : खण्ड 'ब' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देना है। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

2) Prove that any open interval is not compact.

सिद्ध कीजिए कि कोई भी विवृत्त अन्तराल संहत नहीं होता है।

3) Prove that sequence $\left\{\frac{(3n)!}{(n!)}\right\}^{1/n}$ is convergent.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\left\{\frac{(3n)!}{(n!)}\right\}^{1/n}$ अभिसारी हैं।

4) Prove that continuous function define on closed interval is bounded in closed interval.

सिद्ध कीजिए कि संवृत अंतराल पर सतत फलन, संवृत अंतराल में परिबद्ध होता है।

5) Prove that the function

सिद्ध कीजिए कि फलन

$$f(x, y) = \begin{Bmatrix} (x + y\cos\left(\dfrac{1}{x+y}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{Bmatrix}$$

is continuous on origin

मूल बिंदू पर सतत है।

6) State and prove fundamental theorem of integral calculus.

समाकलन गणित के मूलभूत प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

7) Prove that $\langle f_n \rangle$ where $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ $\forall x \in \mathrm{R}$ is uniform convergent.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\langle f_n \rangle$ जहां $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$, $\forall x \in \mathrm{R}$ एक समान अभिसारी है।

8) Prove that any subset G of a metric space (X, d) is open. If and only if G is neighbourhood of each of it's point.

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि (X, d) का एक उपसमुच्चय G विवृत्त है यदि व केवल यदि G अपने प्रत्येक बिन्दु का प्रतिवेश है।

9) Prove that every infinite subset of a compact metric space has at least one limit point.

प्रदर्शित कीजिए कि संहत दूरीक समष्टि का प्रत्येक अनंत उपसमुच्चय कम से कम एक सीमा बिन्दु रखता है।

Section - C $\qquad$ 2 × 14 = 28

Long Answer Questions

Note: Section 'C' contain 4 Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer any two (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

(खण्ड – स)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

निर्देश : खण्ड 'सी' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को कीन्हीं भी दो (02) सवालों के जवाब देना है। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है, परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं। इस प्रश्नपत्र में नॉन–प्रोग्रामेबल साइंटीफिक केल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

10) Prove that sequence $\{x_n\}$ where $x_n = \frac{2n}{3n+4}$ $\forall n \in \mathrm{N}$ is montonic increasing and bounded. Find it's limit 'l' and If $|x_n - l| < \in \forall n > n_0$ and $\in = \frac{1}{1000}$ then find n_0.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$ जहां $x_n = \frac{2n}{3n+4}$ $\forall n \in \mathrm{N}$ एक दिष्ट वर्धमान व परिबद्ध है। इसकी सीमा 'l' ज्ञात कीजिए व जब $\in = \frac{1}{1000}$ हो तो $|x_n - l| < \in \forall n > n_0$ के लिए n_0 ज्ञात कीजिए।

11) Prove that set of rational numbers Q is not a complete ordered field.

सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं है।

12) State and prove necessary and sufficient condition for Riemann integrability of a function.

किसी फलन के रीमान समाकलनीयता के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध को कथन कर सिद्ध कीजिए।

13) If (X, d) is a metric space and D define on X such that $\mathrm{D}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ $\forall x, y \in \mathrm{X}$ then show that (X, D) is a metric space.

यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा D, X पर निम्न प्रकार परिभाषित है:

$$\mathrm{D}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \forall x, y \in \mathrm{X}$$

तब प्रदर्शित कीजिए कि (X, D) एक दूरीक समष्टि है।